Correction DS n°6.

Exercice 1A

Partie I

1(A) (H1) $p(E) = 0,2$ et $p(A) = 0,8$

(H2) $p_E(T) = 0,5$

(H3) $p_A(T) = 0,375$

(b) on a $E \cap A = \emptyset$ et $E \cup A = \Omega$ Donc E et A forment un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales.

$$p(T) = p(E) \times p_E(T) + p(A) \times p_A(T)$$

$$= 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,375$$

$$= 0,10 + 0,3$$

$$\boxed{p(T) = 0,4.}$$

$$\begin{array}{r} 0,375 \\ \times\ 0,8 \\ \hline 0,3000 \end{array}$$

(c) On cherche $p_T(E)$. On utilise la formule de Bayes :

$$p_T(E) = \frac{p(E \cap T)}{p(T)} = \frac{p(E) \times p_E(T)}{p(T)}$$

$$\boxed{p_T(E) = \frac{0,2 \times 0,5}{0,4} = 0,25}$$

2) (a) On a $\boxed{X(\Omega) = [\![0;10]\!]}$

L'épreuve "On regarde si un appel concerne le petit électroménager" est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,2.

On répète cette épreuve 10 fois. On a donc X suit une loi binomiale

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(10\,;\,0,2)}$

et $\forall k \in X(\Omega) \quad p(X=k) = \binom{10}{k} 0,2^k \times 0,8^{10-k}$

(b) $\boxed{E(X) = 10 \times 0,2 = 2}$ $\qquad \boxed{V(X) = 10 \times 0,2 \times 0,8 = 1,6}$

③ (a) Comme pour la question 2, la loi de Y est une loi binomiale de paramètre $n = 600$ (nombre d'appel) et $p = p(T) = 0,4$

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(600\,;0,4)$

(b) On cherche l'espérance et la variance de Y

$$E(Y) = 600 \times 0,4 = 240 \qquad V(Y) = 600 \times 0,4 \times 0,6 = 240 \times 0,6 = 144$$

Une loi normale s'écrit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ l'espérance et σ^2 la variance

donc $Y \sim \mathcal{N}(240\,; 144)$

(c) On pose alors $Z = \frac{Y - 240}{12} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$ qui suit une loi normale centrée réduite

$$\begin{aligned} P(Y \leq 252) &= P(Y - 240 \leq 12) \\ &= P\left(\frac{Y-240}{12} \leq 1\right) \\ &= P(Z \leq 1) \\ &= \Phi(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y \leq 252) \simeq 0,8413}$$

Partie II

① Soit $A > 0$. La fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^A xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-x}\,dx.$$

$u = x \quad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-x}$

$$= -Ae^{-A} + 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^A$$

$$= -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.$$

On a alors $\lim\limits_{A \to +\infty} -Ae^{-A} = 0$ par croissance comparées.

$$\lim_{A \to +\infty} e^{-A} = 0$$

Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ est convergente et $\boxed{\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1}$

(2) • $\forall x \geq 0 \quad xe^{-x}$ est positif

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0}$

• $x \longmapsto xe^{-x}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$

$x \longmapsto 0$ est continue sur $]-\infty ; 0[$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

• $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad$ (cf (1))

$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe et vaut 1.

$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

(3) (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

<u>Si $x \leq 0$</u> $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

<u>Si $x > 0$</u> $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x te^{-t}\,dt$

$= 1 - xe^{-x} - e^{-x}$ d'après la question 1

donc $\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - xe^{-x} - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

(b) $P(T \leq 4) = F(4) = 1 - 4e^{-4} - e^{-4}$ $\boxed{= 1 - 5e^{-4}}$

$P(2 \leq T \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - 5e^{-4} - (1 - 3e^{-2})$

$\boxed{= 3e^{-2} - 5e^{-4}}$

$P_{(T \geq 2)}(T \leq 4) = \dfrac{P(T \leq 4 \cap T \geq 2)}{P(T \geq 2)} = \dfrac{P(2 \leq T \leq 4)}{P(T \geq 2)} = \dfrac{3e^{-2} - 5e^{-4}}{1 - (1 - 3e^{-2})}$

$\boxed{= 1 - \dfrac{5}{3}e^{-2}}$

④ On s'intéresse à $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx$.

- $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = 0$ car $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) = 0$

- $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$. Soit $A > 0$

$$\int_0^A x f(x)\,dx = \int_0^A x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x} - xe^{-x}\right]_0^A + \int_0^A xe^{-x}\,dx + \int_0^A e^{-x}dx$$

$u = x \quad v' = xe^{-x}$

$u' = 1 \quad v = -xe^{-x} - e^{-x}$

$$= -A^2e^{-A} - Ae^{-A} + 0 - Ae^{-A} - e^{-A} + 1 + \left[-e^{-x}\right]_0^A$$

$$= -A^2e^{-A} - 2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 1 + 1.$$

$$= 2 - A^2e^{-A} - 2Ae^{-A} - 2e^{-A}.$$

On a $\lim_{A \to +\infty} A^2 e^{-A} = 0$ par croissance comparée.

$\lim_{A \to +\infty} A e^{-A} = 0 \qquad \lim_{A \to +\infty} e^{-A} = 0$

Donc $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = 2$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ est absolument convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 2$

Donc $\boxed{E(M) = 2.}$

⑤ $E(Z) = E(1 + 0{,}2M)$

$= 1 + 0{,}2E(M)$

$\boxed{E(Z) = 1{,}4.}$

Exercice 2A

I ① $p(D) = 0{,}05$ $\quad$ $p(\bar{D}) = 0{,}95$

$p_D(\bar{A}) = 0{,}9$ $\quad$ $p_D(A) = 0{,}1$

$p_{\bar{D}}(A) = \cancel{0{,}8}$ 0.8

② $p(A \cap D) = p(D) \times p_D(A) = 0{,}005$

$p(A \cap \bar{D}) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(A) =$ 0.76

④ On cherche $p_A(D)$. On utilise la formule de Bayes.

$p_A(D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(A)}$ et ③ $p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap \bar{D})$

$=$ 0.765

$$\boxed{p_A(D) = \frac{0{,}005}{\cancel{0{,}195}} \simeq 0.007}$$

0.765

II ① $X(\Omega) = [\![0\,;10]\!]$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10\,;0{,}95)$

$E(X) = 10 \times 0{,}95 = 9{,}5$

et $\forall k \in [\![0\,;10]\!]$, $P(X=k) = \binom{10}{k} 0{,}95^k \times 0{,}05^{10-k}$

② On cherche la probabilité de l'évènement $X = 10$.

$P(X=10) = \binom{10}{10} 0{,}95^{10} = (0{,}95)^{10}$.

③ L'évènement "au moins un appareil présente un défaut" est donnée par $X < 10$.

$P(X<10) = 1 - P(X=10) = 1 - (0{,}95)^{10}$.

III (1) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

• Positivité

Soit $t > 0$, $-t \geqslant -2t$

$\Leftrightarrow e^{-t} \geqslant e^{-2t}$

$\Leftrightarrow 2e^{-t} - 2e^{-2t} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow f(t) \geqslant 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geqslant 0$.

• $t \mapsto 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que composée et somme de fonction continue sur $]0;+\infty[$.

$t \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

• On a $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$

On s'intéresse à $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ - Soit $A > 0$

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A 2e^{-t}\,dt - 2\int_0^A e^{-2t}\,dt$$

$$= 2\left[-e^{-t}\right]_0^A + \left[e^{-2t}\right]_0^A$$

$$= -2e^{-A} + 2 + e^{-2A} - 1$$

$$= 1 - 2e^{-A} + e^{-2A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1}$$

(2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$$ (d'après la question précédente)

d'où $F(x) = 1 - 2e^{-x} + (e^{-x})^2$

$$= (1 - e^{-x})^2$$

(3) On cherche $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow (1 - e^{-x})^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ (car $1 - e^{-x} > 0$, $\forall x > 0$)

$$\Leftrightarrow e^{-x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)}$$

(4) . $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt = 0$

La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$. Soit $A > 0$

$$\int_0^A tf(t)\,dt = \int_0^A 2t e^{-t}\,dt - \int_0^A 2te^{-2t}\,dt$$

$u = t$ $v' = -2e^{-2t}$
$u' = 1$ $v = -e^{-2t}$

$u = 2t$ $v' = e^{-t}$
$u' = 2$ $v = -e^{-t}$

$$= \left[-2te^{-t}\right]_0^A + \int_0^A 2e^{-t}\,dt + \left[-te^{-2t}\right]_0^A + \int_0^A -e^{-2t}\,dt$$

$$= -2Ae^{-A} + \left[-2e^{-t}\right]_0^A + (-Ae^{-2A}) + \left[+\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^A$$

$$= -2Ae^{-A} - Ae^{-2A} - 2e^{-A} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2A} - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A tf(t)\,dt = 3/2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente. L'espérance de T existe et $\boxed{E(T) = 3/2}$.

Exercice 3A

1. Si $x \geq 0$, $(x+1)^3 \geq 0$ et donc $f(x) \geq 0$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0}$

• $x \mapsto (x+1)^3$ est continue sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas (en tant que polynôme).

Donc $x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^3}$ est continue sur $]0;+\infty[$

De plus $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$

• $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$

Soit $A > 0$

$$\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = 2\left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2}\right]_0^A$$

$$= -\frac{1}{(A+1)^2} + 1.$$

et $\lim\limits_{A \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{(A+1)^2} = 1$

Donc on a $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existe et vaut } 1.}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

Si $x < 0$ $\quad F_T(x) = 0$

Si $x \geq 0$ $\quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

donc $\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{sinon.} \end{cases}}$

3. On cherche $p(T > 4) = 1 - F_T(4)$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$$

$\boxed{p(T > 4) = \dfrac{1}{25}}$

4) On cherche $P_{(T>4)}(T>5) = \dfrac{P(T>5 \cap T>4)}{P(T>4)}$

$= \dfrac{P(T>5)}{P(T>4)}$

Or $P(T>5) = 1 - F_T(5)$

$= \dfrac{1}{36}$

donc $\boxed{P_{(T>4)}(T>5) = \dfrac{1/36}{1/25} = \dfrac{25}{36}}$

5) (a) X suit une loi binomiale de paramètre $n=125$, $p = P(T>4) = \dfrac{1}{25}$

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(125 ; \dfrac{1}{25}\right)}$

(b) $\boxed{E(X) = \dfrac{125}{25} = 5}$ et $\boxed{V(X) = \dfrac{125}{25} \times \dfrac{24}{25} = \dfrac{24}{5}}$

6) On cherche la première apparition d'un succès dans une épreuve de Bernoulli.

Y suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{25}$

$Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{25}\right)$.

(b) $E(Y) = 25$

$V(Y) = 24x25$

Exercice 13

(1)(a) La fonction $t \mapsto a(1-t)^{a-1}$ est continue sur $[0;1[$.

$\forall x \in [0;1[$, $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x a(1-t)^{a-1}dt$

$$= \left[-(1-t)^a\right]_0^x$$

$$\boxed{\int_0^x f(t)dt = 1-(1-x)^a}$$

(b) On a $\lim\limits_{x \to 1, x<1} (1-x) = 0^+$

et $(1-x)^a = e^{a\ln(1-x)} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ car $a>0$

Donc $\boxed{\int_0^1 f(t)dt \text{ est convergente et } \int_0^1 f(t)dt = 1}$

(c). $\forall t \in [0;1[$, on a $(1-t)^{a-1} \geq 0$ et $a \geq 0$ donc $f(t) \geq 0$.

Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \geq 0.}$

. $t \mapsto a(1-t)^{a-1}$ est continue sur $[0;1[$ en tant que composée de fonctions continues.

$t \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1 \text{ et } 0}$

. On a $\int_{-\infty}^0 f(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt = 0$

Donc d'après la question précédente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente

et $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.}$ Ccl: f est une densité de probabilité.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Si $x<0$, $F(x) = 0$

Si $x \in [0;1[$, $F(x) = 1-(1-x)^a$ (d'après la question 1a)

Si $x \geq 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 1$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3 (a) $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$, $G(x) = P(Y \leq x)$

$$= P(-\ln(1-X) \leq x)$$
$$= P(1-X \geq e^{-x})$$
$$= P(X \leq 1-e^{-x})$$

Or $1-e^{-x} \leq 0 \iff 1 \leq e^{-x}$

$\iff 0 \leq -x$

$\iff x \leq 0$ Donc $\underline{\forall x \leq 0,\ G(x) = 0}$.

$1 - e^{-x} \geq 1 \iff -e^{-x} \geq 0$

Ce cas est impossible car $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} \geq 0$.

Donc $\forall x > 0$, $1-e^{-x} \in [0;1[$. et donc

$$G(x) = 1 - (1-(1-e^{-x}))^a = 1 - (e^{-x})^a$$
$$= 1 - e^{-ax}$$

<u>Récapitulons</u>

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 . \end{cases}}$$

(b) G est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a, donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)}$

4 (a) D'après le cours, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}.}$

Exercice 3B.

Liminaire : 1 $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$

2 On a $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} = \dfrac{\left(-(n+1)x^n\right)(1-x) + \left(1 - x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{1 + n x^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$

Partie 1 :

1 $E(X) = m = 5$

et $p(X < 7) = 0{,}8413$ On pose $X^* = \dfrac{X - 5}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Ainsi $P\left(\dfrac{X-5}{\sigma} < \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413$

$P\left(X^* < \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413$

$\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413$

donc $\dfrac{2}{\sigma} = 1$

et $\boxed{\sigma = 2.}$

2 $P(X > 9) = P\left(\dfrac{X-5}{2} > 2\right)$

$= 1 - P(X^* < 2)$

$= 1 - \Phi(2)$

$= 1 - 0{,}9772$

$\boxed{P(X > 9) = 0{,}0228}$

③ On cherche $P_{(X>3)}(X<7) = \dfrac{P(X<7 \cap X>3)}{P(X>3)}$

$$= \frac{P(3<X<7)}{P(X>3)}$$

Or $P(X>3) = P\left(X^* > \frac{-2}{2}\right) = P(X^* > -1)$

$= 1 - \Phi(-1)$ et $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

donc $P(X>3) = \Phi(1)$

$P(3<X<7) = P(-1 < X^* < 1) = 2\Phi(1) - 1.$

Donc $P_{(X>3)}(X<7) = \dfrac{2\Phi(1)-1}{\Phi(1)}$

$$= \frac{2\times 0{,}8413 - 1}{0{,}8413} = \frac{1{,}6826 - 1}{0{,}8413}$$

$$= \frac{0{,}6826}{0{,}8413}.$$

④ (a) "Attendre moins de 7 minutes à l'arrêt de bus" est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $P(X<7) = P(X^*<1) = \Phi(1) = 0{,}8413$.

On répète cette expérience 10 fois de façon indépendante

Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10\,;\,0{,}8413).}$

On a ainsi $\boxed{E(Y) = 8{,}413}$ et $\boxed{V(Y) = 8{,}413 \times 0{,}1687}$

(b) On a $Z=0$, l'évènement où le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les 10 jours.

Donc $P(Z=0) = p(Y=10) = (0{,}8413)^{10} = p^{10}$ (où $p=0{,}8413$)

On a $\forall k \in [\![1;10]\!]$

$$P(Z=k) = p\,(1-p)^{k-1}$$

On a $E(Z) = \sum_{k=1}^{10} k\, P(Z=k)$

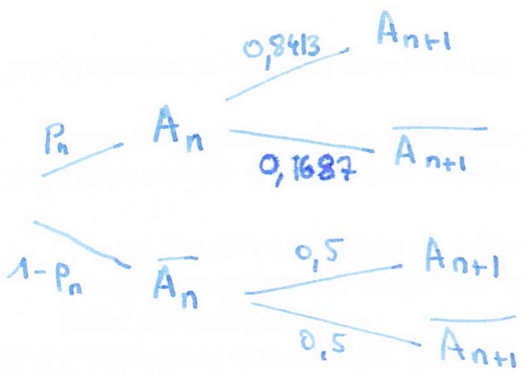
$$= \sum_{k=1}^{10} k\, p\,(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{10} k(1-p)^{k-1}$$

$$= p \times \left(\frac{10(1-p)^{11} - 11(1-p)^{10} + 1}{p^2} \right).$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{10(1-p)^{11} - 11(1-p)^{10} + 1}{p}.}$$

5) Afin de mieux comprendre la situation, construisons un arbre.



(a) On a d'après la formule des probabilités totales.

$$p(A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n})\, p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \quad p_{n+1} = p_n \times p + (1-p_n)\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{p_{n+1} = p_n\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.}$$

(b) On a $\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2}$

$$\alpha\left(1 - p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha\left(\frac{3}{2} - p\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = \frac{1}{3-2p}.$$

La suite (p_n) est arithmético-géométrique.

On pose $v_n = p_n - \alpha$.

On a alors $v_{n+1} = p_{n+1} - \alpha$

$$v_{n+1} = p_n\left(p - \tfrac{1}{2}\right) - \alpha + \frac{1}{2}.$$

$$v_{n+1} = (v_n + \alpha)\left(p - \frac{1}{2}\right) - \alpha + \frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n\left(p - \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\alpha\left(p - \frac{1}{2}\right) - \alpha + \frac{1}{2}}_{=0 \text{ d'après la formul}}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*}$ $v_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1$ et $v_1 = p_1 - \alpha$ et $p_1 = 1$.

donc $v_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha)$

et $p_n = v_n + \alpha \iff \boxed{p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha.}$

(c) On a $0 < \left(p - \frac{1}{2}\right) < 1$ donc

$\lim_{n \to +\infty} \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$. Ainsi la suite $\underline{(p_n) \text{ est convergente}}$

et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \alpha.}$

<u>Partie 2.</u>

1(a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(Y_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}$

$\boxed{E(Y_t) = \lambda t}$ et $\boxed{V(Y_t) = \lambda t}$

(b) "$Y_t = 0$" signifie que la société n'a reçu aucun appel entre 0 et t.

"$T > t$" signifie que le premier appel arrive après le temps t.

donc ces deux évènements sont les même.

$$P(T > t) = P(Y_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

On a alors $P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

(c) On a alors

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On reconnait une loi exponentielle de paramètre λ.

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \qquad E(T) = \frac{1}{\lambda}.}$$

② (a) . $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) \geq 0$

. g est continue sauf éventuellement en 0.

. Pour le calcul de $\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$, on peut procéder par intégrations par parties ou remarquer que.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ alors $E(X) = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = \frac{1}{1} = 1$.

Donc $\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1$. et ainsi $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1}$

(b). On a $\int_{-\infty}^{0} t\, g(t)\,dt = 0$.

. On regarde $\int_0^{+\infty} t\, g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$.

<u>On pose $A>0$</u>

$$\int_0^A t^2 e^{-t}\,dt = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A 2t e^{-t}\,dt.$$

$u = t^2 \quad v' = e^{-t}$

$u' = 2t \quad v = -e^{-t}$

$$= -A^2 e^{-A} + 0 + 2\int_0^A t e^{-t}\,dt.$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} -A^2 e^{-A} = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A t e^{-t}\,dt = 1$ (vu précédemment)

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A t^2 e^{-t}\,dt = 2$

<u>Ainsi</u> $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ est convergente. $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\,dt$ est absolument convergente et $\boxed{E(U) = 2.}$

En moyenne, les transports effectués par la <u>société dure 2h.</u>

Exercice 1C

① (1) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Donc $\boxed{P(T_i < t) = F_{T_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$

(2) "Le composant T_i est défaillant entre 0 et t" est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est

$p = P(T_i < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

On répète cette épreuve n fois de manière indépendante

Donc $\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-e^{-\lambda t})}$

On a $\boxed{E(N_t) = n(1-e^{-\lambda t})}$.

(3) On cherche quand $E(N_t) \geqslant \frac{n}{2}$.

$$\Leftrightarrow n(1-e^{-\lambda t}) \geqslant \frac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow -\ln(2) \geqslant -\lambda t$$

$$\Leftrightarrow t \geqslant \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Donc $\boxed{t_0 = \frac{\ln(2)}{\lambda}}$.

② (1) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\{S_n > t\} = \{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \cap \dots \cap \{T_n > t\}.$$

(2) $F_n(t) = P(S_n \leqslant t) = 1 - P(S_n > t)$

Si $t \geqslant 0$

$$= 1 - P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \dots \cap \{T_n > t\})$$

$$= 1 - P(T_1 > t)\,P(T_2 > t) \times \dots P(T_n > t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} e^{-\lambda t} \dots e^{-\lambda t}$$

$$F_n(t) = 1 - e^{-\lambda n t}.$$

Si $t < 0$

$$F_n(t) = 0.$$

Récapitulons $F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

La densité $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ +\lambda n e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

On reconnait une loi exponentielle de paramètre λn

donc $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda n)}$ et $\boxed{E(S_n) = \frac{1}{\lambda n}}$.

3 (1) Le système fonctionne correctement si au moins un composant fonctionne correctement

$\{U_n > t\} = \{T_1 > t\} \cup \{T_2 > t\} \cup \dots \cup \{T_n > t\}$

$\{U_n < t\} = \overline{\{U_n > t\}} = \{T_1 < t\} \cap \{T_2 < t\} \cap \dots \cap \{T_n < t\}$.

(2) $G_n(t) = P(U_n < t) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i < t)$

$= (1-e^{-\lambda t})^n$ si $t \geq 0$

$$\boxed{G_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ (1-e^{-\lambda t})^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

On a $\boxed{g_n(t) = G_n'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ n(1-e^{-\lambda t})^{n-1} \times \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$

(3) On a $\int_{-\infty}^{0} t g_n(t)\,dt = 0$

On regarde $\int_0^{+\infty} t g_n(t)\,dt$. $t \mapsto t g_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Soit $A > 0$

$$\int_0^A t g_n(t)\,dt = \int_0^A n\lambda\, t(1-e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t}\,dt.$$

Par IPP

$u = t \quad v' = n\lambda(1-e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t}$

$u' = 1 \quad v = (1-e^{-\lambda t})^n$

$$= \left[t(1-e^{-\lambda t})^n\right]_0^A - \int_0^A (1-e^{-\lambda t})^n\,dt.$$

$$= A(1-e^{-\lambda A})^n - \int_0^A (1-e^{-\lambda t})^n\,dt.$$

On utilise le binôme de Newton pour calculer

$$\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-e^{-\lambda t}\right)^k \times 1^{n-k}$$

On a alors

$$\int_0^A \left(1-e^{-\lambda t}\right)^n dt = \int_0^A \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-\lambda k t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^A (-1)^k e^{-\lambda k t} dt + \int_0^A dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[-\frac{1}{\lambda k} e^{-\lambda k t}\right]_0^A + A.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{\lambda k} - \frac{1}{\lambda k} e^{-\lambda k A}\right) + A.$$

On a alors

$$\int_0^A t\, g_n(t)\, dt = A\left(1-e^{-\lambda A}\right)^n - A - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{\lambda k} - \frac{1}{\lambda k} e^{-\lambda k A}\right)$$

$$= A\left(\left(1-e^{-\lambda A}\right)^n - 1\right) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{\lambda k} - \frac{1}{\lambda k} e^{-\lambda k A}\right)$$

On a $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{\lambda k} e^{-\lambda k A} = 0$.

On a après un développement limité à l'ordre 1.

$$\left(1-e^{-\lambda A}\right)^n = 1 - n e^{-\lambda A} + e^{-\lambda A} \varepsilon(A) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

donc $A\left(\left(1-e^{-\lambda A}\right)^n - 1\right) = A\left(n e^{-\lambda A}\right. + A e^{-\lambda A} \varepsilon(A)$

$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $\int_0^{+\infty} t\, g_n(t)\, dt$ converge et.

$$\int_0^{+\infty} t\, g_n(t)\, dt = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times \frac{1}{\lambda k}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ et en changeant d'indice

$$E(U_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\cdot\ E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$$

Posons $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k = (1-x)^n$

On a alors $\int_0^t \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k dx = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{-1}{k+1}(-x)^{k+1}\right]_0^t$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{-1}{k+1}\times(-t)^{k+1}$$

donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^n dx$$

$$= \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Donc $\boxed{E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} E(U_{k+1}) - E(U_k) = E(U_n) - E(U_1)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda(k+1)}$$

(avec $E(U_1) = E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$

On a $E(U_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda(k+1)} + E(U_1)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda k}$$

Donc $\boxed{E(U_n) \sim \frac{\ln(n)}{\lambda}}$

Exercice 2C :

I 1 (a) On cherche $P_{(U=k)}(R=\ell)$ pour tout $\ell \in [\![0;n]\!]$.

On tire n fois dans l'urne U_k contenant k boules rouges de façon indépendantes. Il s'agit d'une loi binomiale de paramètre n (n tirages) et $\frac{k}{N}$ (probalité de succès)

$\forall \ell \in [\![0;n]\!]$ $$\boxed{P_{(U=k)}(R=\ell) = \binom{n}{\ell}\left(\frac{k}{N}\right)^{\ell}\left(\frac{N-k}{N}\right)^{n-\ell}}$$

(b) $\{U=0 ; U=1 ; \dots ; U=N\}$ forme un système complet d'évènements. D'après la formule des probalilités totales

$$P(R=r) = \sum_{k=0}^{N} P(U=k)\, P_{(U=k)}(R=r)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\binom{n}{r}\left(\frac{k}{n}\right)^{r}\left(\frac{N-k}{N}\right)^{n-r}$$

$$\boxed{P(R=r) = \frac{\binom{n}{r}}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{r}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}$$

2) D'après la formule de Bayes :

$$P_{(R=r)}(U=i) = \frac{P(U=i)\, P_{U=i}(R=r)}{P(R=r)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{N+1}\times\binom{n}{r}}\left(\frac{i}{N}\right)^{r}\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\cancel{\frac{\binom{n}{r}}{N+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{r}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}$$

$$\boxed{P_{(R=r)}(U=i) = \frac{\left(\frac{i}{N}\right)^{r}\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{r}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}}$$

3 (a) " $Y_N \leq p$ " signifie que l'on a choisi une urne ayant une proportion de boules rouge inférieure à p (où pN boules rouges).

$$\boxed{"Y_n \leq p" = "U \leq pN"}$$

On a alors $P_{(R=r)}(Y_n \leq p) = P_{(R=r)}(U \leq pN)$

$$= \sum_{k=0}^{pN} P_{(R=r)}(U=i)$$

$$\boxed{P_{(R=r)}(Y_n \leq p) = \frac{\sum_{i=0}^{pN} \left(\frac{i}{N}\right)^r \left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}}$$

(b) On pose $f : t \mapsto t^r (1-t)^{n-r}$

D'après Riemann, $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

donc $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r} = \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r}\,dt$.

On pose $\tilde{N} = pN$

et $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{pN} \left(\frac{i}{N}\right)^r \left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r} = \frac{p}{\tilde{N}} \sum_{i=0}^{\tilde{N}} \left(\frac{ip}{\tilde{N}}\right)^r \left(1-\frac{ip}{\tilde{N}}\right)^{n-r}$

Or $\lim_{\tilde{N} \to +\infty} \frac{p}{\tilde{N}} \sum_{i=0}^{\tilde{N}} f\left(0 + (p-0) \times \frac{i}{\tilde{N}}\right) = \int_0^p f(t)\,dt$.

Donc $P_{(R=r)}(Y_n \leq p) = \dfrac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{Np} \left(\frac{i}{N}\right)^r \left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}} \xrightarrow[\substack{N \to +\infty \\ pN \text{ entier}}]{} \dfrac{\int_0^p f(t)\,dt}{\int_0^1 f(t)\,dt}$.

$$\boxed{\lim_{\substack{N \to +\infty \\ pN \text{ entier naturel}}} P_{(R=r)}(Y_n \leq p) = \frac{\int_0^p f(t)\,dt}{\int_0^1 f(t)\,dt}}$$

II (1) $a \geq 1$, $b \geq 1$

Donc $x \mapsto x^{a-1}$ est continue sur $[0;1]$

$x \mapsto (1-x)^{b-1}$ est continue sur $[0;1]$

Donc $x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est continue sur $[0;1]$ en tant que produits de fonctions continues.

Donc l'intégrale $\boxed{B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ existe.}}$

(2) (a) $B(a+1,b) + B(a,b+1) = \int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\,dx + \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx$

$$= \int_0^1 x^a(1-x)^{b-1} + x^{a-1}(1-x)^b\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left(x + (1-x)\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$\boxed{B(a+1,b) + B(a,b+1) = B(a,b)}$$

$$B(a,b+1) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \left[\frac{1}{a}x^a(1-x)^b\right]_0^1 + \int_0^1 b(1-x)^{b-1}\frac{x^a}{a}\,dx$$

$u = (1-x)^b$ $\quad v' = x^{a-1}$

$u' = -b(1-x)^{b-1}$ $\quad v = \frac{1}{a}x^a$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{b}{a}x^a(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$\boxed{B(a,b+1) = \frac{b}{a}B(a+1,b)}$$

$B(a+1,b) + B(a,b+1) = B(a,b)$ (Formule 1)

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}\right)B(a+1,b) = B(a,b)$ (Formule 2)

$\Leftrightarrow \boxed{B(a+1,b) = \frac{a}{b+a}B(a,b)}$

(b) $B(1,b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,dx$

$$= \left[-\frac{1}{b}(1-x)^b\right]_0^1$$

$$\boxed{B(1,b) = \frac{1}{b}}$$

On va utiliser la relation $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b} B(a,b)$.

$$B(2,b) = \frac{1}{(1+b)} \times \frac{1}{b}$$

$$B(3,b) = \frac{2}{(2+b)} \times \frac{1}{(1+b)} \times \frac{1}{b}$$

$$B(4,b) = \frac{3 \times 2}{(3+b)(2+b)} \times \frac{1}{(b+1)} \times \frac{1}{(b)}$$

On va montrer par récurrence sur a la formule

$$\mathcal{P}_a : \left\{ B(a,b) = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!} \right\}.$$

Initialisation : $\mathcal{P}_1$: $B(1,b) = \frac{0!\,(b-1)!}{b!} = \frac{1}{b}$.

Hérédité : On suppose la formule vraie pour un certain $a \in \mathbb{N}^*$.

$$B(a+1,b) = \frac{a}{a+b} B(a,b) = \frac{a!\,(b-1)!}{(a+b)!}$$

Donc $\mathcal{P}_{a+1}$ est vraie.

Ainsi $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{N}^* \quad B(a,b) = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}}$

(c) 2 façons. Soit en ayant trouvé la formule précédente.

```
a=input ("Donner un entier a")
b= input ("Donner un entier b")
result = factorial(a-1) * factorial(b-1) / factorial(a+b-1)
disp(result).
```

(c) Soit en repassant par la fonction.

```
a = input ("Donnez un entier a")
b = input ("Donnez un entier b")
function y = f(x)
    y = x^(a-1) * (1-x)^(b-1)
endfunction
result = integrate('f(x)', 'x', 0, 1)
disp(result)
```

(3) (a) • $\forall x \in]0;1[, \left.\begin{array}{l} x^{a-1} \geqslant 0 \\ (1-x)^{b-1} \geqslant 0 \end{array}\right\} f(x) \geqslant 0$ (si $C \geqslant 0$)

• Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

• f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

• $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

$\int_0^1 f(x)\,dx = C \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = C\,B(a,b)$.

En posant $\boxed{C = \frac{1}{B(a,b)}}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Donc f est une densité de probabilité.

(b) $\forall x \in]0;1[$, f est dérivable (produit de fonctions dérivables) et

$$\boxed{f'(x) = C(a-1)x^{a-2}(1-x)^{b-1} - C(b-1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}}$$

Supposons $a \neq 1$ et $b \neq 1$

$f'(x) = C x^{a-2}(1-x)^{b-2}\left((a-1)(1-x) - (b-1)x\right)$.

f' s'annule lorsque $(a-1)(1-x) - (b-1)x = 0$

$$\iff (a-1) - (a-1)x - (b-1)x = 0$$

$$\iff a-1 = (a-1+b-1)x$$

$$\iff \boxed{x = \frac{a-1}{a+b-2} \in]0;1[} \quad \left(\text{car } \begin{array}{l} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{array}\right)$$

• <u>Continuité de f en 0</u>

<u>Si $a > 1$</u> $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^{a-1} = 0 \quad$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

La fonction est continue en 0

<u>Si $a = 1$</u> $\quad f(x) = C(1-x)^{b-1} \xrightarrow[x \to 0]{} C$

La fonction n'est pas continue en 0.

• <u>Dérivabilité de f en 0</u>

$$f'(x) = C(a-1)(x)^{a-2}(1-x)^{b-1} - C(b-1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

<u>si $a > 2$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x^{a-2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^{a-1} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x)$$

La fonction est dérivable en 0.

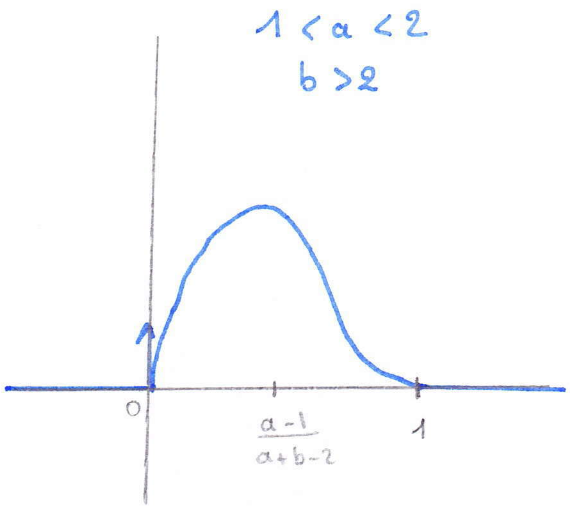
si $1 \leq a < 2$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^{a-2} = +\infty \quad$ donc f n'est pas dérivable en 0

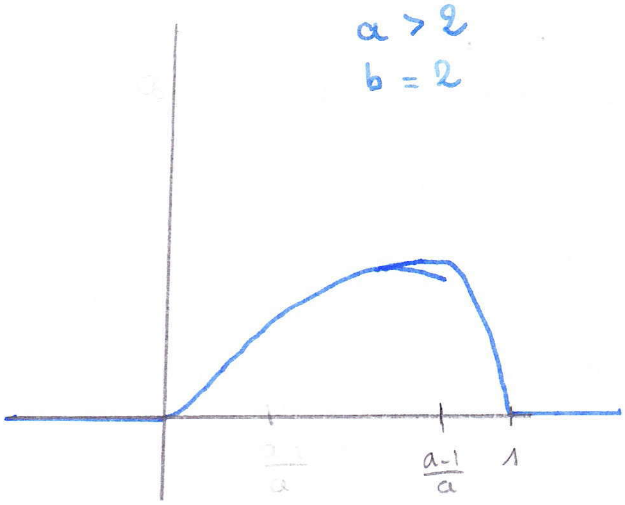
Enfin si $a = 2$

$$f'(x) = C(a-1)(1-x)^{b-1} - C(b-1)x^{a-1}(1-x)^{b-2} \xrightarrow[x \to 0]{} C(a-1)$$

Donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

- On se doute que les résultats seront similaires pour $x = 1$ et b.





(c) $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt = 0$ $\qquad \int_{1}^{+\infty} t f(t)\, dt = 0$

$$\int_0^1 t f(t)\, dt = \int_0^1 C\, t^{a}(1-t)^{b-1}\, dt = C \int_0^1 t^{a}(1-t)^{b-1}\, dt$$

$$= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}$$

Or $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b} B(a,b)$

Donc $E(X)$ existe car $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente et

$$\boxed{E(X) = \frac{a}{a+b}.}$$

Exercice 36 Notons que $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ donc c_n existe.

(1) (a) Soit $x \in [0;1]$,

$$x^{n-1} \geqslant x^n$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant \frac{x^n}{1+x}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \geqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

$$\Rightarrow c_n \geqslant c_{n+1}$$

La suite (c_n) est décroissante.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} + c_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n}x^n\right]_0^1$$

$$\boxed{c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}.}$$

(c) $x \in [0;1]$ donc $2 \geqslant 1+x \geqslant 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^{n-1} \leqslant \frac{x^{n-1}}{1+x} \leqslant x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\,dx \leqslant c_n \leqslant \int_0^1 x^{n-1}\,dx$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \leqslant c_n$ Coté droit inutile.

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant 2c_n.$$

D'un autre côté, d'après (b), $c_n + c_{n-1} = \frac{1}{n-1}$

et $c_{n-1} \geqslant c_n$ (suite décroissante)

donc $c_{n-1} + c_n \geqslant 2c_n$.

$\Rightarrow \frac{1}{n-1} \geqslant 2c_n$.

En conclusion $\boxed{\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}}$

(d) $c_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2)$.

Par récurrence $P_n : \left\{ c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) \right.$.

P_1 s'écrit $c_1 = (-1) \times (-\ln(2)) = \ln(2)$.

Hérédité :

$c_{n+1} = \frac{1}{n} - c_n$.

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$

$$= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$

car $(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1} = 1$. $= (-1)^{n+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$.

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$

Donc P_{n+1} est vraie.

(P_n) est héréditaire.

(e) n = input("Donnez un entier n strictement positif")

```
c = - log(2)
for k = 1 : n-1
    c = c + (-1)^(k+1) / k
end
    c = (-1)^n * c
disp(c).
```

2 (a) Remarquons que $t \mapsto \dfrac{1}{t^n(1+t)}$ est continue sur $[1, +\infty[$

Donc $\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,dt$ existe.

On utilise le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$

$du = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$

On a $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,dt = -\int_1^x \frac{1}{t^{n-2}(1+t)} * \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$

$$= \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-2}}{1+\frac{1}{u}}\,du$$

$$\boxed{\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du}$$

(b) On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \lim_{x\to+\infty}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du$

$$= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du = c_n.$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{c_n}{c_n} = 1.$

Par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.}$

- $\forall t \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t^n > 0$, $(1+t) > 0$ et $c_n > 0$

On a alors $\forall t \geq 1$, $f_n(t) > 0$ et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) \geq 0}$$

- $t \mapsto t^n$ est continue et ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$.

$t \mapsto 1+t$ est continue et ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$

Donc $t \mapsto f_n(t)$ est continue sur $[1;+\infty[$.

Ainsi f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

$\boxed{f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$

(c) . Si $n \geq 2$

$$\frac{t}{c_n t^n (1+t)} = \frac{1}{c_n t^{n-1}(1+t)} \leq \frac{1}{c_n t^n}$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$

Donc par comparaison $\int_1^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ existe et

$$\int_1^x \frac{t}{c_n t^n (1+t)}\,dt = \frac{1}{c_n}\int_1^x \frac{1}{t^{n-1}(1+t)}\,dt = \frac{1}{c_n}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-2}}{1+u}\,du.$$

$$= \frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Dans ce cas, l'espérance de X_n existe et vaut

$$\boxed{E(X_n) = \frac{c_{n-1}}{c_n}.}$$

Si $n=1$

$$\int_1^x \frac{t}{c_1 t(1+t)}\,dt = \int_1^x \frac{dt}{c_1(1+t)} = \frac{1}{c_1}\Big[\ln(1+t)\Big]_1^x$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\ln(1+x) - \ln(2)\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Donc pour $n=1$, il n'y a pas d'espérance.

(d) $f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{c_1\, t(1+t)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\quad F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt$

$\underline{\text{si } x < 1}$, $\boxed{F_1(x) = 0}$

$\underline{\text{si } x \geq 1}$ $\quad F_1(x) = \displaystyle\int_1^x f_1(t)\,dt$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} \qquad \text{on a } \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \left(\int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{1+t} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \left(\left[\ln t\right]_1^x - \left[\ln(1+t)\right]_1^x \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \left(\ln(x) - 0 - \ln(1+x) + \ln(2) \right)$$

$$\boxed{F_1(x) = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}$$

On résout l'inéquation $\quad P(X_1 \leq y) \geq \frac{1}{2}$.

$$\iff F_1(y) \geq \frac{1}{2}.$$

$$\iff 1 - \frac{1}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{1+y}{y}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

$$\iff \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1+y}{y}\right)$$

$$\iff \frac{\ln(2)}{2} \geq \ln\left(\frac{1+y}{y}\right)$$

$$\iff e^{\frac{\ln(2)}{2}} \geq \frac{1+y}{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\, y \geq 1 + y.$$

$$\Rightarrow \boxed{y \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

Afin de déterminer une densité de Z, on cherche sa fonction de répartition F_Z.

$$F_Z(x) = P(Z \leq x)$$
$$= P(\ln(X_1) \leq x)$$
$$= P(X_1 \leq e^x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Une densité est alors

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{\ln(2)} \times \left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

on a $\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

(e) $\forall u \in [0;1]$, $(1+u)^2 \geqslant 1$.

donc $$\frac{1}{(1+u)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^n}{(1+u)^2} \leq u^n$$

$$\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \int_{1/x}^{1} u^n dx$$

Or $\displaystyle\int_{1/x}^{1} u^n dx = \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1}\right]_{1/x}^{1} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Donc $$0 \leq \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes

on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,du\right)=0$.

On a $F_n(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 1\\ \int_1^x \frac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Or $\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,dt=\int_{1/x}^{1}\frac{u^{n-1}}{1+u}\,du.$

$v=\frac{1}{1+u}$ $w'=u^{n-1}$

$v'=-\frac{1}{(1+u)^2}$ $w=\frac{u^n}{n}$

$$=\left[\frac{u^n}{(1+u)n}\right]_{1/x}^{1}+\frac{1}{n}\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,du.$$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{(1/x)^n}{n(1+1/x)}+\frac{1}{n}\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,du$$

On a donc $F_n(x)=\frac{1}{2nc_n}-\frac{(1/x)^n}{nc_n(1+1/x)}+\frac{1}{nc_n}\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,du.$

Or d'après la question (1c), on a $\frac{1}{n}\leq 2c_n\leq\frac{1}{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq nc_n\leq\frac{1}{2}\times\frac{n}{n-1}$

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} nc_n=\frac{1}{2}$.

donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2nc_n}=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1.$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$

$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,du=0$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=1.}$

(f) si $x\leq 1$, on a $F_n(x)=0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=0.}$